Classe 4 prof. G. Respano

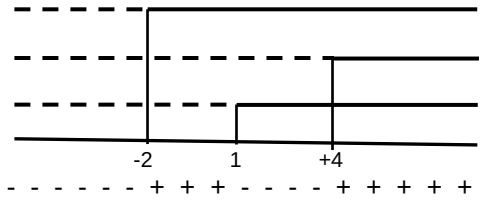
Fare lo studio della seguente funzione

$$y = \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1$$

DOMINIO
Si tratta di una funzione razionale fratta. Il dominio si calcola uguagliando a zero il denominatore ed escludendo i valori trovati.
$3(x-1)(x+2)(x-4) = 0$; e fornisce per soluzione $x = 1\,; x = -2; x = 4;$. Perciò il dominio è

D = R–{1;-2:4};

ASINTOTI
Gli asintoti verticali si calcolano in corrispondenza dei punti di discontinuità. studiamo il segno del denominatore dopo aver fatto la scomposizione $3(x-1)(x+2)(x-4) \geq 0$



Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{81}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{81}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{0}{0} = 1; \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{0}{0} = 1;$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{81}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{81}{0^-} = -\infty;$$

I punti $x = -2;\ x = 4$ sono punti di discontinuità di seconda specie.
Poiché i limiti della funzione per $x = -2;\ x = 4$ danno ±∞ si conclude che $x = -2;\ x = 4;$ sono asintoti verticali.
Il punto x = 1 invece è un punto di discontinuità di terza specie, infatti il limite della funzione per x che tende a 1 non dà ∞, ma 1. Quindi x =1 non è asintoto verticale
Cerchiamo ora gli asintoti orizzontali. Si fa:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \pm\infty$$

Perciò non ci sono asintoti orizzontali.
Poiché risulta:

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x-1)^4}{3x(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 = \frac{1}{3}$$

$$q = \lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1 - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}$$

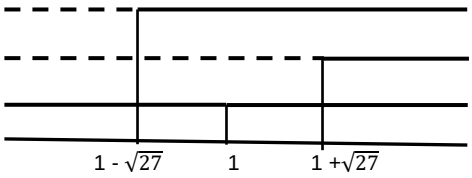
Quindi ; $m = \frac{1}{3}$; $q = \frac{2}{3}$; perciò c'è un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

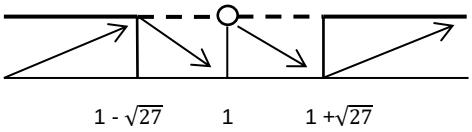
MASSIMI E MINIMI
Per il calcolo dei massimi e minimi calcoliamo la derivata della funzione

$$y' = \frac{(x-1)^2(x^2-2x-26)}{3(x+2)^2(x-4)^2}$$

Studiamo il segno della derivata; il denominatore nel nostro dominio è sempre positivo.Perciò il segno dipenderà solo dal numeratore. Si risolve la disequazione $(x-1)^2(x^2-2x-26) \geq 0$;

$(x^2-2x-26) \geq 0; \left(1-\sqrt{27}\right)\left(1+\sqrt{27}\right) \geq 0$





In x=1 la funzione non esiste e nemmeno la sua derivata .
Si ha un massimo in $x = 1-\sqrt{27}$ =; si ha un minimo in $x = 1+\sqrt{27}$ =
$f\left(1-\sqrt{27}\right) \cong$ -1,6; $f\left(1+\sqrt{27}\right) \cong 3{,}6$ min($1+\sqrt{27}$;3,6) Max($1-\sqrt{27}$; -1,6)
Grafico:

$$y = \frac{(x-1)^4}{3(x-1)(x+2)(x-4)} + 1$$

