Classe 4 prof. G. Respano

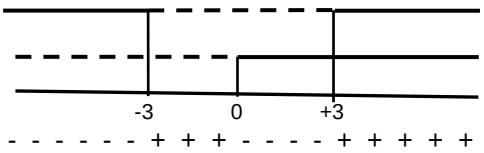
Fare lo studio della seguente funzione

$$y = \frac{x^4}{3x^3 - 27x}$$

DOMINIO
Si tratta di una funzione razionale fratta. Il dominio si calcola uguagliando a zero il denominatore ed escludendo i valori trovati.
$3x^3 - 27x = 0$; $3x(x^2 - 9) = 0$; e fornisce per soluzione $x = 0 ; x = -3; x = 3;$ . Perciò il dominio è

D = R–{0;3:-3};

ASINTOTI
Gli asintoti verticali si calcolano in corrispondenza dei punti di discontinuità. Studiamo il segno del denominatore




Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \frac{81}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \frac{81}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \frac{81}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \frac{81}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \frac{0}{0} = 0; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \frac{0}{0} = 0;$$

I punti $x = -3;\ x = 3$ sono punti di discontinuità di seconda specie.
Poiché i limiti della funzione per $x = -3;\ x = 3$ danno ±∞ si conclude che $x = 3;\ x = -3;$ sono asintoti verticali.
Il punto x = 0 invece è un punto di discontinuità di terza specie, infatti il limite della funzione per x che tende a 0 non dà ∞, ma 0. Quindi x =0 non è asintoto verticale
Cerchiamo ora gli asintoti orizzontali. Si fa:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} = \pm\infty$$

Perciò non ci sono asintoti orizzontali.
Poiché risulta:

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^4}{3x^4 - 27x^2} = \frac{1}{3}$$

$$q = \lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^4}{3x^3 - 27x} - \frac{1}{3}x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^4 - x^4 + 9x^2}{3x^3 - 27x} = 0$$

Quindi ; $m = \frac{1}{3}$ ; $q = 0;$ perciò c'è un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{3}x$

MASSIMI E MINIMI

Per il calcolo dei massimi e minimi calcoliamo la derivata della funzione

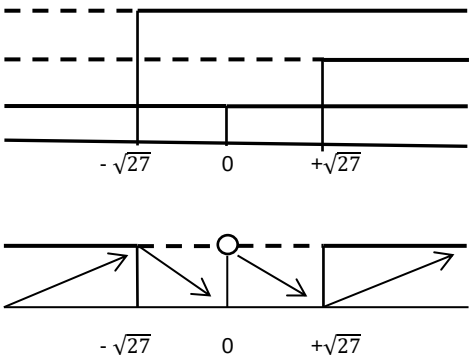
$$y' = \frac{4x^3(3x^3 - 27x) - x^4(9x^2 - 27)}{(3x^3 - 27x)^2} = \frac{12x^6 - 108x^4 - 9x^6 + 27x^4}{(3x^3 - 27x)^2}$$

$$y' = \frac{3x^6 - 81x^4}{(3x^3 - 27x)^2} = \frac{3x^4(x^2 - 27)}{(3x^3 - 27x)^2}$$

$$y' = \frac{3x^4(x^2 - 27)}{(3x^3 - 27x)^2}$$

Studiamo il segno della derivata; il denominatore nel nostro dominio è sempre positivo.Perciò il segno dipenderà solo dal numeratore. Si risolve la disequazione $3x^4(x^2 - 27) \geq 0$;

$3x^4\left(x + \sqrt{27}\right)\left(x - \sqrt{27}\right) \geq 0$;




In x=0 la funzione non esiste e nemmeno la sua derivata .
Si ha un massimo in $x = -\sqrt{27}$ =; si ha un minimo in $x = \sqrt{27}$ =
$f\left(-\sqrt{27}\right) \cong$ -2,6; $f\left(\sqrt{27}\right) \cong 2{,}6$ min($\sqrt{27}$ ;2,6 ) Max( $-\sqrt{27}$; -2,6 )
Grafico:

$$y = \frac{x^4}{3x^3 - 27x}$$

