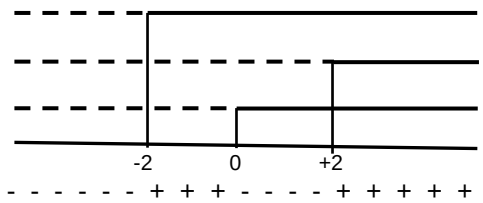
Studio di funzione n° 3 prof. G. Respano

Fare lo studio della seguente funzione

$$y = \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x}$$

DOMINIO
Si tratta di una funzione razionale fratta. Il dominio si calcola uguagliando a zero il denominatore ed escludendo i valori trovati.
$x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0;$ e fornisce per soluzione $x = 0\,; x = -2; x = 2;$. Perciò il dominio è D = R–{0;2:-2};

ASINTOTI
Gli asintoti verticali si calcolano in corrispondenza dei punti di discontinuità. studiamo il segno del denominatore dopo aver fatto la scomposizione $x(x-2)(x+2) \geq 0$



Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{0^-} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{0^-} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{0^+} = +\infty;$$

Il punto $x = 0;\ x = -2;\ x = 2$ sono punti di discontinuità di seconda specie.
Poiché i limiti della funzione per $x = 0;\ x = -2;\ x = 2$ danno ±∞ si conclude che $x = 0;\ x = 2;\ x = -2;$ sono asintoti verticali.
Cerchiamo ora gli asintoti orizzontali. Si fa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 4x} = 1;$$

Perciò y=1 è un asintoto orizzontale.
Poiché risulta:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^4 - 4x^2} = 0;$$ non ci sono asinoti obliqui

MASSIMI E MINIMI
Per il calcolo dei massimi e minimi calcoliamo la derivata della funzione

$$y' = \frac{(3x^2 - 4)(x^3 - 4x\,) - (x^3 - 4x + 1)(3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$$

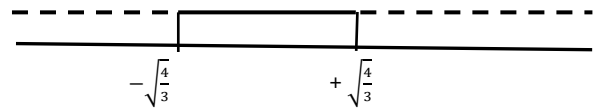
$$y' = \frac{3x^5 - 12x^3\ - 4x^3 + 16x - (3x^5 - 4x^3 - 12x^3\ + 16x + 3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-3x^2 + 4}{(x^3 - 4x)^2}$$

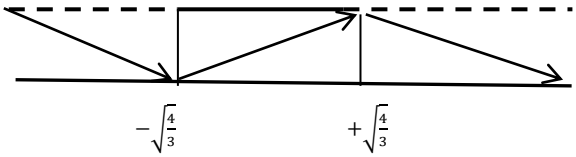
Studiamo il segno della derivata; il denominatore nel nostro dominio è sempre positivo.Perciò il segno dipenderà solo dal numeratore. Si risolve la disequazione $-3x^2 + 4 \geq 0$;

$a < 0 \quad ; \Delta > 0$ IV caso

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$



Segno della derivata



Si ha un massimo in $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ =1,155 ; si ha un minimo in $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ = -1,155

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ =0,68 ; $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ = 1,32 min(-1,155; 1,32) Max(1,155; 0,68)

Grafico:

