Piastre piane.

Metodo delle serie doppie di Fourier

Il metodo consente il calcolo delle piastre rettangolari poggiate al contorno e impedite di sollevarsi negli angoli. Le prime soluzioni di questo problama furono date da Navier sotto forma di serie doppie di Fourier. Per i casi di un carico p uniformemente ripartito e di un carico P concentrato in un punto generico.

Consideriamo alcune situazioni pratiche e le rispettive formule date dal metodo.

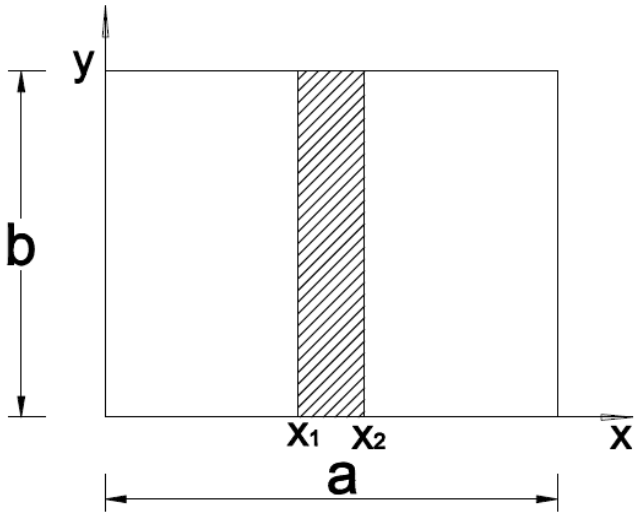
Una situazione tipica è quella del collaudo di un solaio a soletta piena. Occorre calcolare la freccia elastica massima teorica col carico di esercizio p uniformemente ripartito sulla superficie del solaio e determinare un carico equivalente p_o da disporre su un'area prefissata e tale che provochi una freccia elastica uguale. Il carico equvalente p_o sarà quello di prova in fase di collaudo.

Il metodo illustrato è corredato da un foglio elettronico Excel che ci consente di eseguire il calcolo agevolmente e di calcolare la superficie elastica in funzione di un punto di coordinate x,y.

Vediamo le formule da utilizzare nei nostri casi

LASTRE PIANE

a) Carico uniformemente ripartito su di un rettangolo parziale, limitato da due rette di ascisse x_1 e x_2 e da due ordinate 0 e b.



L'equazione della superficie elastica risulta (con m, n = 1,2,3…)

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P_{m\,n}}}{\mathrm{B}\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} sen\frac{m\pi x}{a} sen\frac{n\pi y}{b}$$

Dove i coefficienti P_{mn} sono dati da

$$\mathrm{P_{m\,n}} = \frac{4}{ab} p \int_{x_1}^{x_2} sen\frac{m\pi x}{a} dx \int_{0}^{b} sen\frac{n\pi x}{b} dy$$

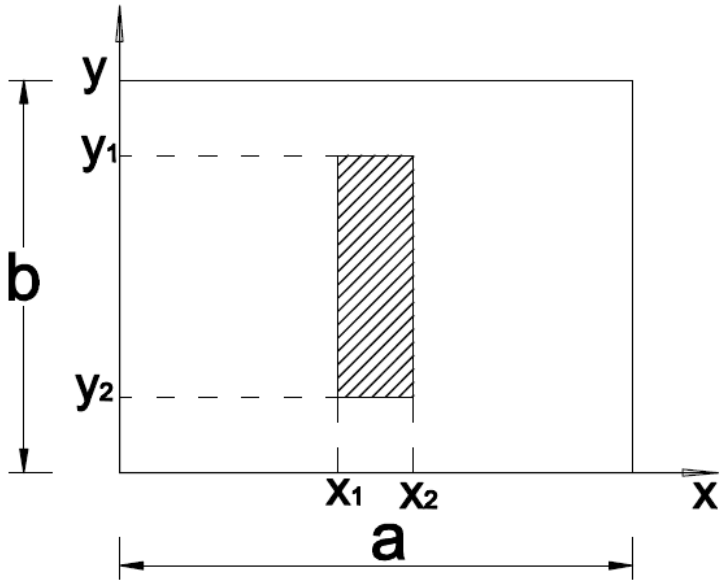
$$= \frac{4}{ab} \cdot p_o \left[-\frac{1}{\frac{m\pi}{a}} cos\frac{m\pi x}{a} \right]_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{1}{\frac{n\pi}{b}} cos\frac{n\pi x}{b} \right]_{0}^{b}$$

$$= \frac{4}{ab} \cdot p_o \left[\frac{1}{\frac{m\pi}{a}} cos\frac{m\pi x_1}{a} - \frac{1}{\frac{m\pi}{a}} cos\frac{m\pi x_2}{a} \right] \left[-\frac{1}{\frac{n\pi}{b}} cos\frac{n\pi b}{b} + \frac{1}{\frac{n\pi}{b}} cos0 \right]$$

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \cdot p_o \left[-\frac{1}{\frac{n\pi}{b}} cos\frac{n\pi b}{b} + \frac{1}{\frac{n\pi}{b}} cos0 \right] \left[\frac{b}{n\pi} (1 - cosn\pi) \right]$$

(con m = 1,2,3,4…; n = 1,2,3,4…)

b) Carico uniformemente ripartito su di un rettangolo parziale limitato da due rette x_1 e x_2 e da due ordinate y_1 e y_2 .



La freccia elastica w(x,y) in un generico punto di coordinate x,y è data da:

$$w(x,y) = \frac{4P}{\pi^6 B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\frac{m\pi x}{a} sen\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left(cos\frac{m\pi x_1}{a} - cos\frac{m\pi x_2}{a}\right) \cdot \left(cos\frac{m\pi y_1}{b} - cos\frac{m\pi y_2}{b}\right)$$

(con m = 1,2,3,4…; n = 1,2,3,4…)

$$B = \frac{Es^3}{12(1-\upsilon^2)}$$

Dove

B = coefficiente di rigidezza flessionale della piastra;
E = modulo di elasticità longitudinale del materiale (di Young);
υ = coefficiente di contrazione trasversale del materiale (di Poisson).
υ per il calcestruzzo vale =1,5 ÷2 e per l'acciaio = 0,3
s = spessore della lastra
a = lato in metri
b = lato in metri
p = carico distribuito in Kg/mq
m = 1,2,3,4…
n = 1,2,3,4…
x_1 ; x_2 ; y_1 ; y_2 in metri
x = ascissa di un punto qualsiasi di cui si vuol conoscere w
y = ordinata di un punto qualsiasi di cui si vuol conoscere w

ESERCIZIO 1

Determinare l'abbassamento ed il momento flettente nel centro di una lastra quadrata di lato 6 m, appoggiata e caricata uniformemente con carico p = 800 Kg/m^2

Avvalendosi del foglio elettronico Excel e impostando i dati di trova che l'abbassamento w(x,y) mel punto centrale $w\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$; è dato da

w = 3,127 mm

ESERCIZIO 2

Determinare l'abbassamento ed il momento flettente nel centro di una lastra rettangolare di lati 6x8 m, appoggiata e caricata uniformemente con carico p = 1500 Kg/m^2 su una superficie di coordinate x_1= 3,5m; x_2= 4,5 e y_1=0m e y_2=6m

Avvalendosi del foglio elettronico Excel e impostando i dati di trova che l'abbassamento w(x,y) mel punto centrale $w\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$; è dato da

w = 1,793 mm